Definitionslücken gebrochen-rationaler Funktionen

<table>
<tr><th></th><th>Polstelle mit VZW</th><th>Polstelle ohne VZW</th><th>Hebbare Definitionslücke</th></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$</td><td>$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 6x^2 - 32}$</td><td>$2x\ (x-1)$</td><td>$f(x) = \frac{2x\ (x-1)}{x - 1}$</td></tr>
<tr><td>Definitionslücken
$q(x) = 0$</td><td colspan="2">$x^3 + 6x^2 - 32 = 0$
Polynomdivision: $x_1 = 2$
$x^3 + 6x^2 - 32 : (x - 2) = x^2 + 8x + 16$
$-\ (x^3 - 2x^2)$

$8x^2 - 32$
$-\ (8x^2 - 16x)$

$16x - 32$
$-\ (16x - 32)$

0
➔ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2;-4\}$

➔ pq-Formel:
$x^2 + 8 + 16 = 0$
$x_{2/3} = -4 \pm \sqrt{16 - 16}$
$x_2 = -4$</td><td>$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

➔ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$</td></tr>
<tr><td>Nullstellen
$p(x) = 0$</td><td colspan="2">$x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ keine Nullstellen</td><td>$2x\ (x-1) = 0 \rightarrow x_1 = 0$
$x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \notin D_f$</td></tr>
<tr><td>Verhalten der Funktion in der Umgebung der Definitionslücke
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$</td><td>➔ für $x \rightarrow 2^+$ gilt: $f(x) \rightarrow \infty$
➔ für $x \rightarrow 2^-$ gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$</td><td>➔ für $x \rightarrow -4^+$ gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$
➔ für $x \rightarrow -4^-$ gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$</td><td>$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
$= \lim_{x \to 1} 2x = 2$</td></tr>
<tr><td>Es gilt:</td><td colspan="2">$p(x_0) \neq 0$ und $q(x_0) = 0$</td><td>$p(x_0) = q(x_0) = 0$</td></tr>
</table>

Skizze